

# 竜ヶ崎第一高等学校 白幡探究Ⅰ 数学領域

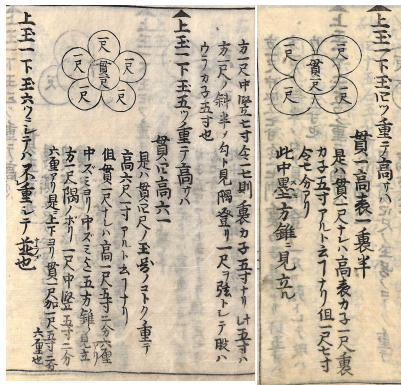
## 下に玉四つ上に玉一つ重ねた高さは

1年 G組 丙班

High of put four balls under, put a ball above is “Omote is one syaku or Ura (mean  $\times$ ) is  $5^{\text{sun}}$ ”

### 原本

### The original



## キーワード

角錐  
pyramid  
球  
sphere  
曲尺  
kyakusyaku

### 現代語訳

### Modern translation

「直径が曲尺表で1尺の時、下に玉四つ上に玉一つ重ねた高さは、表1尺、裏(か)けるする」とで半尺(5寸)である」  
それぞれの球の中心を直線で結び、正四角錐にみだてて、正四角錐の底面の1辺の長さは1尺、高さ7寸0.17分。すなわち高さは裏で5寸。この裏5寸は、一辺1尺の対角線の半尺を直角を挟む短い辺を見て、ある頂点と頂点を結んだ時の辺(1尺)を直角三角形の斜辺とすると、直角をはさむ長い辺(高さ)は、裏曲尺5寸になる。  
例題「下に玉5つ、上に玉1つ重ねた高さは。」これは玉の直径が4尺の玉を図のように重ねた時である。  
ただし、玉の直径が1尺の時、高さは1尺5寸2分6厘になる。  
1つの玉を中央部に積み重ねた球の中心を結び、正五角錐と見立てると、正五角錐の底面である正五角形の、1辺は1尺となり、高さは5寸2分6厘であるが、球の中心で結んず足りため、上の球と下の球でそれぞれ半径ずつ足りないで1尺たす。よって、高さは1尺5寸2分6厘となる。  
「上の玉を1つ下の玉を6つにすると重ならず、並ぶ。」

係: 軽部

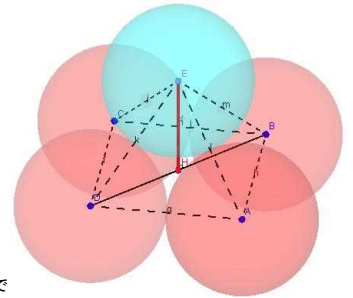
### 数学的内容

### Mathematical contents

(本題)

文章より既知数は球1つの直径が1尺ということであり、それぞれ5つの球の中心を結ぶと右の図のよう1辺が1尺の正四角錐になる。  
求めるのはこの正四角錐の高さに1尺を加えたものであるから高さをhとするとh+1...①と表すことができる。

正四角錐の高さは底面の正方形の1辺が1であるから正方形の対角線は $\sqrt{2}$   
三角形EBDに注目してEからBDに垂直におろした点をHとするとAH=hである。  
三平方の定理より  
 $h^2 = 1^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2$   $h > 0$ ,  $\sqrt{2} = 1.4142$  より  $h = 0.7071$   
(原文ではこれを0.7071としているが1.4142を2で割るので現代の数学では0.7071が正しい)  
これを①に代入して直径1尺の玉をしたに4つ上に1つ重ねた高さは1.707である。 終



(類題)

(1)下に直径4の球を5つ。その上に直径4の球を重ねる。そのときの高さは6.1になる。

【証明】

球の中心を結び正五角錐を作る。これをF-GIJKLとして点Fから垂直におろした垂線と底面との交点をOとする。

球の半径が4であるから、正五角形GIJKLは一辺4で辺FG, FL, FJ, FK, FLはそれぞれ4となる。

この正五角錐の高さFOは三平方の定理より  $FO^2 = FG^2 - GO^2$ ...②と表せる。

仮定より  $FO = FG = 4$  である。

三角形GIOに注目してGIの中点をMとする。正五角形であるから角GOIは76度であり、角GOMはその半分であるため38度である。三角比より  $GO = \frac{2}{\sin 36^\circ}$

これらを②に代入して  $FO^2 = 4^2 - (\frac{2}{\sin 36^\circ})^2$   
 $\sin 36^\circ = 0.5878$   $FO > 0$  より  
 $FO = \sqrt{4.4226}$  となる。

よって  $FO = 2.102$

これは正五角錐の高さであるからこれに球の半径を上下二つ分足して6.1 終

(2) (1)と同じように重ねるのを直径1の球で行った場合の高さ  
《解》  
(1)より直径が4の時高さは6.1であった。  
球の大きさが4分の1倍になっているため高さも4分の1倍して0.525 終

〔補足〕

(2)の求める五角錐の高さをxとして(1)と同様に解くと式は  $x^2 = 1^2 - (\frac{1}{2\sin 36^\circ})^2$   $x > 0$  より  
 $x = \frac{\sqrt{0.2764}}{2}$   $x = 0.525$  終

係: 木村

### 英語訳

### English version

The numerical value we want to know is the one which has added 1<sup>shaku</sup> to the height of the pyramid. When the height is exchanged with H. It's possible to express it with  $H+1$ ...①

A diagonal line is  $\sqrt{2}$  because square 1 side of a base is 1.

We aim at triangle EBD, the point that it was taken down from E vertically in BD is supposed with H.  $AH = h$ . By using the Pythagorean theorem,  $h^2 = 1^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2$ ,  $h > 0$ ,  $h = 1.4142$   $h = 0.7071$ ...②

is substituted for ②, The height of ball of 1shaku of diameter which is piled up on the bottom on 4 = 1.707.

[Example]

Five balls which is diameter 4 in the bottom, the height which piled up a ball of diameter 4 on it = 6.1

[Proof]

We make the Pentagonal pyramid connected a center of the sphere.

This is as F-GIJKL. Point of intersection with the perpendicular line taken down from point F vertically and base is assumed O. We make the Pentagonal pyramid connected a center of the sphere.

Height FO of the Pentagonal pyramid of 1 can expressed by the Pythagorean theorem as  $FO^2 = FG^2 - GO^2$ ...②

Is  $FO = FG = 4$  than hypothesis.

Substitute these for (2). -

$\sin 36^\circ = 0.5878$   $FO > 0$

$FO = FO = 2.102$  Because this is pentagonal pyramid, the radius of the ball is added to this for two of the top and the bottom, and, 6.1.

Q2① like How long length when piling up a ball of diameter 1?

[Proof]

When a diameter is 4, the height is 6.1 from ①

Because the size of the ball is 1/4 time, the height is also done 1/4 time, and, 0.525

[Addition]

The height of five pyramids 2 = x

It's untied like 1,  $x^2 = 1^2$ .

$X = \sqrt{0.2764}$   $X = 0.525$

引用

見立算法規矩分等集 Mitate Sanpou Kiku Buntousyu

享保7年

A.D.1730

著者: 万尾 時春

Autyor : Mashio, Tokiharu



班長: 木崎

### 英語訳

### English version

「High of put four balls under, put a ball above is “Omote is one syaku or Ura (mean  $\times$ ) is  $5^{\text{sun}}$ .”」

To say if diameter is , high is Omote kyakusyaku and Ura kyakusyaku . So, this answer is in diameter.

Draw in straight the center of the ball each other, and estimate this to regular quadrangular pyramid. The length of the edge of the base of regular quadrangular pyramid is and the high is . Namely, the high is ura . this means 「first, look short edge which put 90 degree angle that of diagonal of square . And consider the edge which join the vertex and the vertex as hypotenuse of right triangle. Then long edge which between 90 degree angle is urakane .」

Example) 「High of put 5balls under, put a ball is .」

This is when they put the ball of diameter as that diagram

But, when ball of diameter is , the high is .

First , put the ball in center. And connecting the center of ball, consider that regular pentagonal pyramid. Finery cast that, the high is  $5^{\text{sun}}$

係: 木崎

### まとめ・今後の課題・感想 conclusion, futures problem, Impressions

#### まとめ conclusion

玉が上下に重なっており、その高さを求める場合、玉の中心を結びその底面の対角線と隅登りの値が分かれば求めることができる。 Ball overlap in top and bottom . This height seek way. The center of the ball tie. And seek diagonal of the bottom side and sumiwatari

#### 今後の課題 futures problem

最初に簡単な例題をだし、そのあとに応用をだすという形は現在と変わらないものであった。このように簡単な問題から応用へと誰もがはいりやすいような数学作りが大切であろう。  
First, give an exercise. Next, give applied question.  
This policy does not change.  
This is how it is important for everyone to solve questions easily

#### 感想

今回の題材は立体的な図形だったため、原文が立体のどの部分を示しているのか理解することに苦労した。さらに、数学的な考えでは立体をどのようにわかりやすく表現し、説明するかも困難なものであった。これにはジオエブラを用いた。

#### Impressions

It is difficult to understand that original sentence show which part of place. Because this problem is solid figure. in mathematical thought, it is difficult to how plain express solid figure and explain too. We used jeoebrla as a solution.