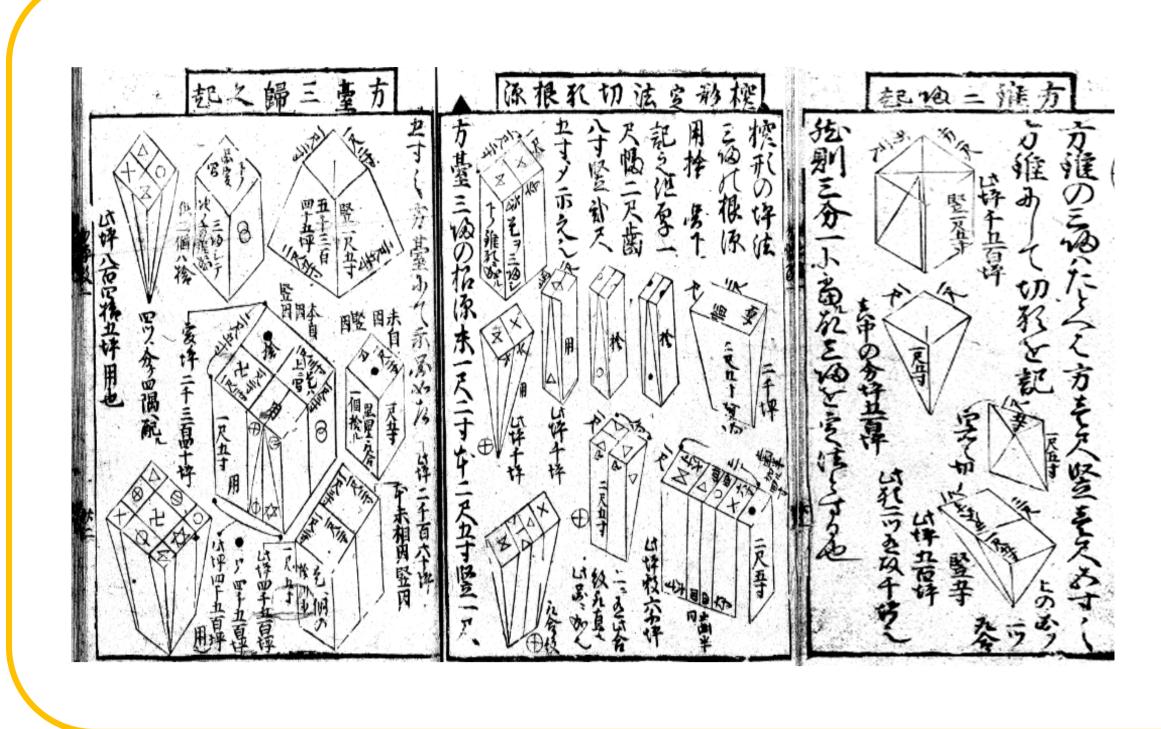
竜ケ崎第一高等学校 白幡探究 I 数学領域 さまざまな立体の体積を求める公式

70th 1年B網 乙班

Formula for various three-dimensional volumes.

原文 Original



キーワード

- -四角錐

Keyword

- QUADRANGULAR **PYRAMID**
- ONE THIRD

現代語訳 Modern Translation

正四角錐の体積を求める時に3分の1を掛ける理由は、たとえば底辺の正方形の1辺が1尺、 高さが1尺5寸の正四角柱として、切り取った形を記す。 そうであるなら全体の3分の1になるので3分の1を掛けることを公式とする。

楔形の体積を求める時に3分の1を掛ける理由は下の図に記す。 底面のたて1尺、横2尺、歯の幅を8寸で全体の高さを2尺5寸としてここに示す。

正四角錐台の体積を求める時に3分の1を掛ける理由は、上底の正方形の1辺が1尺2寸、下 底の正方形の1辺が2尺5寸、高さ1尺5寸の正四角錐台を使って左に図を示す。

係 國定 河合

英語訳 English Translation

There is a one a third regular quadrangular pyramid.

As a regular quadrangular prism which height is 1^{shaku} 5^{sun} , each side of the base is 1^{shaku} , the cut off shape put down. So dividing by three is the rule.

The way to solve the wedge figure 1There is a selection figure whose the length of the base is 1^{shaku} long and 2^{shaku} wide, the length of the thin part is 8^{sun} .

2The rule to divide regular pyramid base by three is truncated square pyramid. The surface of a square of a side is 1^{shaku} . 2^{sun} The bottom of a square of a side is $2^{shaku}.5^{sun}$.

> 係小滝 小田原

英語訳 English Translation

- I think the formula for the volume of the quadrangular pyramid by using the quadrangular prism. use the quadrangular prism which Each—side of the base is 1^{shaku} height is $1^{shaku}5^{sun}$.
- ② I cut the quadrangular pyramid which height is equal to solid of ①
- Then I find that solid of ② volume is a one third of the quadratic prism of ①. From this, formula for the volume of the quadrangular pyramid becomes like the following.

The volume of the quadrangular pyramid =base area \times height $\times \frac{1}{3}$

- I think about the formula for the volume of the wedge shaped
- ① I use the wedge shaped solid which the length of the tooth is 8^{sun} , width is 2^{shaku} , Thickness is 1^{shaku} and height is 2^{shaku} 5^{sun} . In addition, the volume is 2000^{tubo} .
- ② I prepare quadratic prism that the length of the base is 1^{shaku}, the wide of the base is 2^{shaku}4^{sun} and height is as well
- as the solid of ① . This solid's volume is 6000^{tubo} . ③ I distribute ② solid like a figure.
- A The quadrangular prism that length is 1^{shaku} , width is $1^{shaku}2^{sun}$ and height is $2^{shaku}5^{sun}$.
- B Three quadratic prisms that length is 1^{shaku} , width is 4^{sun} and height is $2^{shaku}5^{sun}$. ④ I cut and bring down a quadrangular pyramid that height is $2^{shaku}5^{sun}$ and the volume is a one-third of the ③ A solid
- from (3) A solid.
- ⑤ I use only one of three quadratic prisms of B. And transform it like figure. 6 It becomes wedge-shaped when I match the solid made of 4 5.
- That is to say, this solid is one-third of quadrangular prism of ②. Thus, this solid volume is 2000^{tubo} . The volume of ② is $1^{shaku}5^{sun} \times 2^{shaku}4^{sun} \times 2^{shaku}5^{sun}$
- So wedge is $1^{shaku} \times 2^{shaku} 4^{sun} \times 2^{shaku} 5^{sun} \times \frac{1}{3} = 1^{shaku} \times (2^{shaku} + 4^{sun}) \times 2^{shaku} 5^{sun} \times \frac{1}{3}$
- Thus, formula of the volume of wedge is as follows.

The volume of the wedge = thickness × (width+teeth $\times \frac{1}{2}$)× height $\times \frac{1}{2}$

- III I think about the formula for the volume of the square frustum that the base is square.
- ① I use the square frustum that each side of the lower base is $2^{syaku}5^{sun}$ each side of upper base is $1^{syaku}2^{sun}$ and height is $1^{syaku}5^{sun}$. ② Next, I prepare the quadrangular prism that each side of the base is $2^{syaku}5^{sun}$ and height is $1^{syaku}5^{sun}$ and I make a solid ① based on this solid.
- ③ A The quadrangular prism that each side of the base is 1^{syaku} 2^{sun} and the height is $2^{syaku}5^{sun}$. B The quadrangular prism that the length of the base is $1^{syaku}2^{sun}$ the width of the base is $1^{syaku}3^{sun}$ and the height is $2^{syaku}5^{sun}$ C Next, I prepare the quadrangular prism that each side of the base is $1^{syaku}3^{sun}$ and the height is $2^{syaku}5^{sun}$
- I cut the above mentioned solid
- put slits in solid of B a figure and divide it into four quadrangular prisms. ⑤ I make a quadrangular pyramid which the height is same ,the volume is one-third of the solid of C. 6 I use the solid of A as it is . then, as shown, it becomes the solid of ①when I put the solids of A, B, 5 together .
- I can express the volume in the next expression. It is $A+B+C\times\frac{1}{2}$.
- Then, I substitute each solid volume for this expression.
- And it becomes the next expression. It is 2 1 6 0 tsubo + 2 3 4 0 tsubo + 2 5 3 5 tsubo × $\frac{1}{2}$. It becomes 5345^{tsubo} when I calculate.
- \bigcirc A= 1 syaku 2 sun × 1 syaku 2 sun × 2 syaku 5 sun
- $B \equiv 1^{syaku} 2^{sun} \times 1^{syaku} 3^{sun} \times 2^{syaku} 5^{sun}$ $C = 1^{syaku} 3^{sun} \times 1^{syaku} 3^{sun} \times 2^{syaku} 5^{sun} \times \frac{1}{2}$
- I substitute these expression for an expression of ⑥
- Besides that expression can be transform as follows. $(1^{syaku}2^{sun} \times 1^{syaku}2^{sun} + 1^{syaku}2^{sun} \times 1^{syaku}3^{sun} + 1^{syaku}3^{sun} \times 1^{syaku}3^{sun} \times \frac{1}{2}) \times 1^{shaku}5^{sun}$
- $1^{shaku}5^{sun}$ =height
- $1^{shaku}2^{sun}$ =length of the upper base
- $2^{shaku}5^{sun}$ =length of the lower base
- $1^{shaku}3^{sun}$ =lower-upper

So, next expression is led.

I do it as follows here.

(upper \times upper + upper \times remainder + remainder \times remainder $\times \frac{1}{2}$) \times height

- lower=b
- height=h $\left\{a \times a + a \times (b-a) + (b-a) \times (b-a) \times \frac{1}{2}\right\} \times h$
- $= (a^2 + b^2 + ab) \times h \times \frac{1}{3}$
- Volume of the frustum that base is square=

 $(upper \times upper + lower \times lower + upper \times lower) \times height \times \frac{1}{2}$

係 海老澤 國定

数学的内容 Mathematical contents

四角柱を用いて、四角錐の体積の求め方を考える。 ① 底面の一辺が1尺、高さが1尺5寸の四角柱を用いる。 ② 図のように、高さが等しい四角錐を切り取る。

そうすると、体積が①の図形の3分の1であることがわかり、 これから、四角錐の体積を求める公式は、

四角錐の体積=底面積×高さ $\times \frac{1}{3}$ となる。

Ⅱ くさび型の体積の求め方を考える。

① 歯の長さが8寸、厚さ1尺、幅2尺、高さが2尺5寸のくさび形 単

体積が2000坪であることは図のようにしてわかる。 ②高さが等しく、底面が縦1尺、横が2尺4寸の長方形の四角柱を 用意する。この立体の体積は6000坪である。

 $\rightarrow 1 \ 0 \times 2 \ 4 \times 2 \ 5 = 6 \ 0 \ 0 \ 0$ ②の立体を図のように、 A 縦1尺、横6寸、高さが2尺5寸の四角柱2本をつなげた

四角柱 B 縦1尺、横4寸、高さが2尺5寸の四角柱3本 Aの四角柱を高さが同じで、体積が3分の1の四角錐にする。 Bの四角柱3本のうち、1本だけを用い、図のように変形する。

④、⑤でできた立体を合わせると①のくさび形と同じ形になる。 すなわち②の四角柱の3分の1であることがわかる。 よって、このくさび形の体積は2000坪である。 ②の体積は、図から 1尺×2尺4寸×2尺5寸 であるから

くさび形はこの3分の1より、 1尺×2尺4寸×2尺5寸× $\frac{1}{2}$

=1尺×(2尺+4寸)×2尺5寸× $\frac{1}{2}$ すなわち、

くさび形の体積= 厚さ×(幅+歯の半分)×高さ $\times \frac{1}{2}$ となる。

Ⅲ 正四角錐台の体積を求める公式を考える。 ①下底の各辺が2尺5寸、上底の各辺が1尺2寸の 正四角錐台を使用する。この図形の体積が5345坪であることは 以下のようにわかる。

図のように、底面の1辺が2尺5寸、高さが1尺5寸の四角柱を用意 し、この図形を元に、①の図形を作る。

底面の1辺が1尺2寸、高さが1尺5寸の四角柱 底面が、縦1尺2寸、横1尺3寸で、高さが1尺5寸の四角柱 C 底面の1辺が1尺3寸、高さが1尺5寸の四角柱

以上の、3本を切り出す。 Bの図形に図のように切込みを入れ、4本の四角柱にする。 Cの図形を、高さが同じで体積が3分の1の四角錐にする。 Aの図形はそのまま使用し、A, B, ⑤の3つの図形を図のよう

に合わせると、①の図形になる。 体積は、 A+B+C×3分の1で表され、各々の図形の体積を代 $2160+2340+2535\times3$ 分の1となり、 計算すると 5345坪となる。

⑥A=1尺2寸×1尺2寸×1尺5寸 $\rightarrow 1 \ 2 \times 1 \ 2 \times 1 \ 5 = 2 \ 1 \ 6 \ 0$ B=1尺2寸×1尺3寸×1尺5寸 $\rightarrow 1 \ 2 \times 1 \ 3 \times 1 \ 5 = 2 \ 3 \ 4 \ 0$ C=1尺3寸×1尺3寸×1尺5寸×3分の1

 $\rightarrow 1 \ 3 \times 1 \ 3 \times 1 \ 5 \times \frac{1}{2} = 8 \ 4 \ 5$ であり、 A+B+C×3分の1に代入し、まとめると、 (1尺2寸×1尺2寸+1尺2寸×1尺3寸+ 1尺3寸×1尺3寸)×2尺5寸

となる。 ここで、1尺2寸= 上底の各辺 (以後、上底) 2尺5寸= 下底の各辺 (以後、下底) 1尺3寸= 下底-上底 (以後、差) 1尺5寸= 高さ である。

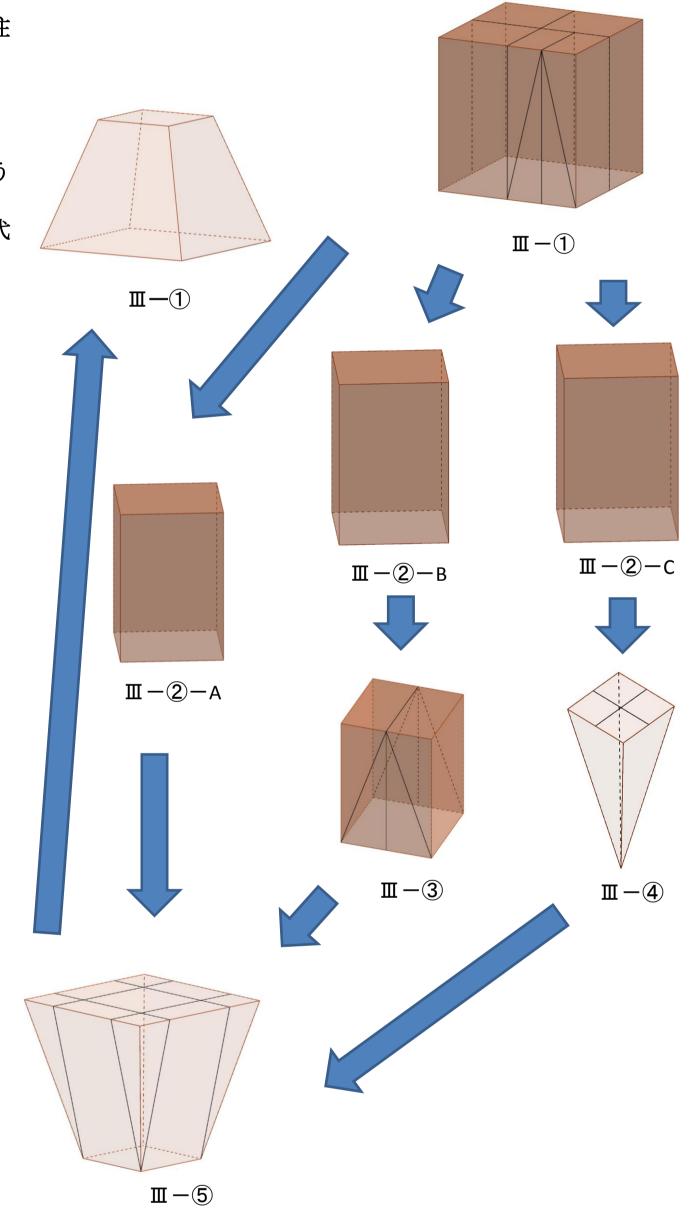
よって、次の式が導かれる。 正四角錐台の体積= $\{ 上底×上底+上底×差+差×差×<math>\frac{1}{3} \}$ × 高さ

ここで 上底=a 下底=b 高さ=h とすると (ただし b>a) $\{a \times a + a \times (b-a) + (b-a) \times (b-a) \times \frac{1}{2}\} \times h$ $= \left\{ \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}ab + \frac{1}{3}b^2 \right\} \times h \times \frac{1}{3}$ $= (a^2 + b^2 + ab) \times h \times \frac{1}{3}$

すなわち、

正四角錐台の体積=

(上底×上底+下底×下底+上底×下底)×高さ $\times \frac{1}{2}$



係 河合 國定

まとめ・今後の課題・感想 Summary • Issue In The Future • Impression

まとめ

今回の図形は全て四角錐の考え方を応用して おり、どの図形も3分の1をかけている。

All this figures apply the way of the quadrangle pyramid すごいと思った。 and every figures multiplied by one-third.

今後の課題

文章量が膨大になってしまい、数学的内容、英訳と もに大変な時間がかかってしまった。 わかりやすく要点をまとめることが 必要だと感じた。

The quantity of the sentence became enormous. It took long time to make mathematics translation and English translation.

We felt that it was necessary to compile the main point clearly.

今回調べた、くさび形も正四角錘台も当時の人は、三角錘の 考え方を応用して、公式を考えだしたことがわかった。当時 の人たちの柔軟な発想力は

「途中さまざまな困難があったが、協力して乗り越えることが でき、班全員で

一丸となって今回の活動に取り組めたと思う。

We understand that person of those days applied the way of thinking of the tetrahedron to the figure which we checked this time to make formulas.

We thought that the flexible idea power of person of those days was fantastic. There was various difficulty on the way, but we

cooperated and was able to get over it. We think that we was able to work on this activity with all the groups in solidarity.

班長 河合

算法勿憚改 Sanpou Hutsudankai

延宝元年 A. D. 1673 著者:村瀬 義益 Author: Yoshimasu murase